

Практика 12. Написать формулу связи между
топологической энтропией и фрактальной размерностью.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Дадим общее определение **мультифрактала**. Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область ζ размера L в Евклидовом пространстве с размерностью d .

Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество из $N \gg 1$ точек, как-то распределенных в этой области. Будем предполагать, что, в конце концов, $N \rightarrow \infty$.

Разобьем всю область ζ на кубические ячейки со стороной $\varepsilon \ll L$ и объемом ε^d . Далее нас будут интересовать только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка. Пусть номер занятых ячеек i изменяется в пределах $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ – суммарное количество занятых ячеек, которое, конечно, зависит от размера ячейки ε .

Пусть $n_i(\varepsilon)$ представляет собой количество точек в ячейке с номером i , тогда величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$$

представляет собой вероятность того, что наугад взятая точка из нашего множества находится в ячейке i .

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Другими словами, вероятности p_i характеризуют относительную заселенность ячеек. Из условия нормировки вероятности следует, что

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1.$$

Стандартный метод мульти-фрактального анализа основан на рассмотрении *обобщенной статистической суммы* $Z(q, \varepsilon)$, в которой показатель степени q может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon).$$

Спектр *обобщенных фрактальных размерностей* D_q (*размерностей Реньи*), характеризующих данное распределение точек в области ζ , определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q - 1},$$

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

где нелинейная функция $\tau(q)$ (в научной литературе она называется *скейлинговой экспонентой*) имеет вид

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln \varepsilon}.$$

Как мы покажем ниже, если $D_q = D = \text{const}$, т.е. не зависит от q , то данное множество точек представляет собой обычный фрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью D . Напротив, если функция D_q как-то меняется с q , то рассматриваемое множество точек является мультифракталом.

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется скейлинговой экспонентой $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}.$$

Покажем теперь, как ведет себя обобщенная статистическая сумма в случае обычного регулярного фрактала с фрактальной размерностью D . В этом случае во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек $n_i(\varepsilon) = N/N(\varepsilon)$, то есть фрактал является однородным.

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Тогда очевидно, что относительные населенности всех ячеек, $p_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, тоже одинаковы, и обобщенная статистическая сумма принимает вид $Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon)$.

Учтем теперь, что, согласно определению фрактальной размерности D , число занятых ячеек при достаточно малом ε ведет себя следующим образом: $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}$.

Отсюда видно, что в случае обычного фрактала функция $\tau(q) = (q-1)D$ – является линейной. Тогда все $D_q = D$ и не зависят от q . Для фрактала, все обобщенные фрактальные размерности D_q которого совпадают, часто используется термин монофрактал.

Если распределение точек по ячейкам неодинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. представляет из себя мультифрактал, и для его характеристики необходим целый спектр обобщенных фрактальных размерностей D_q , число которых, в общем случае, бесконечно.

Так, например, при $q \rightarrow +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью их заполнения p_i . Наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в сумму дают самые разреженные ячейки с малыми значениями заполнения p_i .

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Таким образом, функция D_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек ζ .

Для $q = 0$, $Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon)$ получаем формулу

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right],$$

это означает, что величина D_0 представляет собой хаусдорфову размерность множества ζ .

Определение.

Фрактальная (хаусдорфова) размерность D_F произвольного предельного множества G в N -мерном фазовом пространстве определяется следующей формулой по Колмогорову-Хаусдорфу:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \right],$$

где $M(\varepsilon)$ - минимальное число N -мерных кубиков со стороной ε , необходимых для покрытия всех элементов множества G .

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Хаусдорфова размерность D_0 – характеризует «пористость» или плотность объекта, то есть то, как объект заполняет собою пространство вложения.

Выясним теперь смысл величины D_1 . Статистическая сумма равна

$$\begin{aligned} Z(1, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \exp[(q-1) \ln p_i] \approx (\text{при } q \rightarrow 1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1)p_i \ln p_i] = \\ &= 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \end{aligned}$$

В результате получаем формулу

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}$$

. С точностью до знака в числителе находится энтропия Шеннона (количество информации, необходимое для определения состояния системы в пределах точности ε):

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i.$$

Написать формулу связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

Поскольку энтропия является мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении i , можно сказать, что величина D_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. Благодаря этому свойству величину D_1 называют информационной размерностью.

Мы знаем, что энтропия достигает своего максимального значения при равенстве вероятности $p_i = 1/N(\varepsilon)$, тогда мы получим в этом предельном случае, что $D_0 = D_1$.